

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
– ETAPA LOCALĂ 28.02.2015 –****CLASA A IX-A**

**Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.  
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.**

1. Se consideră șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  def prin  $a_0 = 0, a_1 = 1$  și  $a_{n+1} = 2\sqrt{a_{n+1} \cdot a_n} - a_n + 1, n \geq 1$ . Să

se arate că 
$$a_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + 4\sqrt{a_k \cdot a_{k-1}}}$$

Florin Rotaru , Focșani (GMB nr.9/2014)

2. Fie  $a, b \in \mathbb{R}, a \geq -\frac{18}{15}, b \geq -\frac{7}{10}$  astfel încât  $3a + 2b = 17$  și expresia

$$E(a, b) = 3\sqrt{15a + 8} + 4\sqrt{10b + 7}.$$

- a) Pentru  $a = 3$  să se demonstreze că  $E(a, b) < 50$  ;  
b) Să se determine maximul expresiei  $E(a, b)$  și valorile numerelor  $a, b$  pentru care se atinge acest maxim .

Olimpiada locală , Botoșani 2014

3. Pentru fiecare număr natural  $n$  definim mulțimile:  $A_n = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + [x] \leq n\}$  și  $B_n = \{x \in \mathbb{R} | [x^2] + x \leq n\}$ . Demonstrați că  $A_n \subset B_{n+1}$  și  $B_n \subset A_{n+1}$ .

4. Fie  $ABCDEF$  un hexagon regulat și  $M \in (AC), N \in (CE)$  astfel încât  $\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = r$ . Pentru ce valori ale lui  $r$  punctele  $B, M, N$  sunt coliniare ?

Manual clasa a – IX – a

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
– ETAPA LOCALĂ 28.02.2015 –****CLASA A X-A**

**Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.  
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.**

1. Fie  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  o funcție bijectivă. Să se arate că următoarele afirmații sunt echivalente:

a)  $(f \circ f)(x) = x, (\forall) x \in [0, 1];$

b)  $(f \circ f)(x) + f(x) = x + f^{-1}(x), (\forall) x \in [0, 1]$

Rozalia Marinescu, Hunedoara (GMB , nr.12/2014)

2. Fie numerele reale  $a, b \in (1, \infty), a < b$ , și numerele  $x, y \in (a, b)$ . Să se arate că  $\log_x[(a+b)y - ab] \cdot \log_y[(a+b)x - ab] \geq 4$ .

Ion Călinescu, Câmpulung Muscel

3. Fie  $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| = 1\}$ . Să se determine valoarea maximă a expresiei  $|z+1|^2 + |z-3|^2$  atunci când  $z \in M$  și pentru ce valoare se realizează.

4. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = a^x - a^{-x}, a > 0, a \neq 1$ .

a) Să se studieze monotonia funcției  $f$ ;

b) Să se arate că  $f$  este bijectivă și să se calculeze inversa sa.

C.d.p.

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
– ETAPA LOCALĂ 28.02.2015 –****CLASA A XI-A**

**Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.  
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.**

1. Se consideră mulțimea de matrice  $M = \left\{ \begin{pmatrix} 2-x & x-1 \\ 2-2x & 2x-1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}^* \right\}$ .

a) Să se arate că dacă  $A, B \in M$ , atunci  $A^2 \cdot B^2 \in M$ ;

b) Există matrice  $A \in M$  astfel încât  $A^{2015} = -I_2$  ? Justificați răspunsul .

Manual clasa a-XI-a , Editura Carminis

2. Considerăm șirul de numere reale  $(u_n)_{n \geq 0}$  definit prin  $u_0 = \frac{11}{4}$  și  $u_{n+1} = \frac{5}{2} + \sqrt{u_n - \frac{7}{4}}$ . Arătați

că șirul este convergent și calculați limita sa .

Gazeta Matematică

3. Fie  $A, B \in M_2(\mathbb{Q})$  astfel încât  $AB = BA$ ,  $\det(A) = -3$  și  $\det(A + \sqrt{3}B) = 0$ . Calculați  $\det(A^2 + B^2 - AB)$ .

Olimpiada locală , Constanța 2014

4. Fie  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \geq -2$ . Să se determine pentru ce valori ale constantelor  $a, b$  avem

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + a} - b}{x^2 + 2x - 3} = \frac{3}{16}.$$

C.d.p.

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
– ETAPA LOCALĂ 28.02.2015 –**

**CLASA A XII-A**

**Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.  
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.**

1. Să se calculeze:  $\int \frac{1}{2 + \sin x} dx, \quad x \in [0, 2\pi] .$

O.L. Galați , 2014

2. Să se determine funcțiile derivabile  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  care au proprietatea că funcția  $f + 3g$  este o primitivă a funcției  $2f - g$  și funcția  $5f - 6g$  este o primitivă a funcției  $10f + 2g$  .

Petre Todor , Sebeș ( G.M. 6-7-8 /2014)

3. Fie o funcție bijectivă  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și  $q \in \mathbb{R}$  cu  $f(q) = 2$ . Pe  $\mathbb{R}$  se definește legea de compoziție „ $*$ ” prin  $a * b = f(f^{-1}(a) + f^{-1}(b) - q), (\forall) a, b \in \mathbb{R}$  .

a) Determinați elementul neutru al legii de compoziție și simetricul lui  $a \in \mathbb{R}$  în raport cu legea „ $*$ ” ;

b) Pentru  $f(x) = x^3$ , rezolvați ecuația  $x^2 * x = (6 - q)^3$  .

4. Se consideră funcția  $f_a: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f_a(x, y) = \left( x + ay + \frac{a^2}{2}, y + a \right)$ . Dacă  $G = \{f_a | a \in \mathbb{R}\}$

arătați că :

a)  $(G, \circ)$  este grup, unde „ $\circ$ ” este operația de compunere a funcțiilor;

b)  $(G, \circ) \simeq (\mathbb{R}, +)$ .

Manual clasa a-XII-a , Editura Carminis